Corona und etwas Mathematik

von
Urs Kirchgraber[1]

1

Wie gebannt schauten (und schauen) wir in dieser Zeit auf die Zahlen, die in der Schweiz das Bundesamt für Gesundheit (BAG) und die Kantone täglich veröffentlichen. In Deutschland sind es die Zahlen, die das Robert Koch Institut (RKI) zu Berlin jeden Tag mitteilt und auch die Zahlen, die man aus anderen Teilen der Welt, etwa Italien, Spanien, den Vereinigten Staaten und Grossbritanien hört, erregen grosse öffentliche Aufmerksamkeit und zeitweilig Schrecken: Es geht jeweils um die Zahl der in den letzten 24 Stunden gemeldeten, neu mit dem Virus Sars-Cov-2 infizierten Personen, sowie um die Gesamtzahl der in einer Region oder einem Land bisher total infizierten Menschen. Die Schnelligkeit, mit der die Zahl der Infizierten anwächst, beunruhigt. Der Begriff *exponentielles Wachstum* macht die Runde.

Bei jeder Epidemie/Pandemie für die es (einstweilen?) weder eine Impfung, noch eine gezielte Therapie gibt, konzentriert sich das Interesse auf die *Ausbreitung* und die Frage, ob und wie sie gestoppt oder wenigstens verlangsamt werden kann. Die wohl wichtigste Frage ist, wie die Ansteckung erfolgt. Denn davon hängt wesentlich ab, wie schnell sich die Krankheit verbreitet und was für Massnahmen allenfalls ergriffen werden können, um das Ausbreitungstempo zu reduzieren.

Ein anderer Begriff, der in den Informationssendungen, Talkshows, den Zeitungsartikeln manchmal fällt, ist der der *Modellrechnung*. Mit sogenannten *mathematischen Modellen* wird versucht, gewisse Aspekte des Problems zu erfassen, besser zu verstehen und allenfalls sogar Prognosen zu machen. Ziel dieses Texts ist es, mit Hilfe einfacher Modellannahmen ein paar wenige Facetten des Problems zu erläutern[2].

2

Es war wohl *Thomas Malthus* (1766-1834), britischer Nationalökonom und Sozialphilosoph, der sich schon früh mit dem Problem der "Überbevölkerung" beschäftigt und in diesem Zusammenhang zwischen "*arithmetischem*" und "*geometrischem*" Wachstum unterschieden hat. Von "*arithmetischem*" Wachstum oder "*arithmetischer*" Progression spricht man, wenn sich eine Grösse im Laufe der Zeit so verändert, dass sie in *gleich langen Zeiten* um *gleich viel zu-* (oder auch *ab*)*-nimmt*. "*Geometrisches*" Wachstum oder "*geometrische*" Progression dagegen bedeutet, dass eine Grösse sich so verändert, dass sie in *gleich langen Zeiten* um den *gleich grossen Prozentsatz wächst* (oder *abnimmt.*)

Bezeichnet X die Grösse, deren Wachtumsverhalten interessiert, und

$$X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad \ldots$$

[1] Prof. em. Dr., Departement Mathematik, ETH Zürich

[2] Angeregt wurde dieser Text durch den Artikel "Ungewisse Zeiten, klare Zahlen" von C. Cuchiero und J. Teichmann, erschienen am 8. April 2020 in der österreichischen Zeitung "Falter.at". Josef Teichmann ist Professor für Mathematik an der ETH Zürich, Christa Cuchiero hat bei JT an der ETH doktoriert und ist jetzt Professorin an der Université de Paris (Diderot).

den Wert von X zu den *gleichabständigen Zeitpunkten*

$$0, \quad T, \quad 2\cdot T, \quad 3\cdot T, \quad ...$$

so spricht man von *arithmetischem* oder *linearem* Wachstum der Grösse X, wenn für eine gewisse Zahl z gilt

$$X_1 = X_0 + z, \quad X_2 = X_1 + z, \quad X_3 = X_2 + z, \quad ...$$

Falls z eine *positive* Zahl ist, handelt es sich um "Wachstum" im engeren Sinn, indem X_1 grösser ist als X_0, X_2 grösser ist als X_1, usw. Ist z hingegen eine *negative* Zahl, dann handelt es sich um "negatives Wachstum", also um einen "abnehmenden Vorgang", indem X_1 kleiner ist als X_0, X_2 kleiner ist als X_1, usw. Die *ungeraden* (natürlichen) Zahlen

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad ...$$

sind ein Beispiel für eine "arithmetische Progression". Hier gilt $X_0 = 1$ und $z = 2$.

Gilt hingegen für positive Zahlen X_0, q:

$$\boxed{X_1 = q\cdot X_0, \quad X_2 = q\cdot X_1, \quad X_3 = q\cdot X_2, \quad ...} \tag{1}$$

So liegt ein *geometrisch* oder *exponentiell* verlaufender Vorgang vor[3]. Dabei sind *drei Fälle* zu unterscheiden. Ist q grösser als 1, also $q > 1$, so gilt: $X_1 > X_0$, $X_2 > X_1$, $X_3 > X_2$, usw. und man spricht von *geometrischem* oder *exponentiellem Wachstum*. Ist dagegen q zwischen 0 und 1, also $0 < q < 1$, so gilt: $X_1 < X_0$, $X_2 < X_1$, $X_3 < X_2$, usw. und man spricht von einem *exponentiellen Zerfallsprozess*. Ist schliesslich $q = 1$ so gilt: $X_1 = X_0$, $X_2 = X_1$, $X_3 = X_2$, usw., das heisst: Die Grösse X verändert sich gar nicht, sondern verharrt bei ihrem anfänglichen Wert (kurz: *Anfangswert* genannt) X_0.

Setzt man die erste Gleichung (1) in die zweite ein, dann das Resultat in die dritte, usw. erhält man[4]:

$$\boxed{X_0, \quad X_1 = q\cdot X_0, \quad X_2 = q\cdot q\cdot X_0 = q^2\cdot X_0, \quad X_3 = q^3\cdot X_0, \quad ...} \tag{2}$$

Es ist sinnvoll q wie folgt zu zerlegen:

$$\boxed{q = 1 + p} \tag{3}$$

Es folgt dann aus (1)

$$X_1 = (1+p)\cdot X_0 = X_0 + p\cdot X_0, \quad X_2 = X_1 + p\cdot X_1, \quad X_3 = X_2 + p\cdot X_2, \quad ...$$

Das bedeutet: p gibt an, welchen Anteil man (zum Beispiel) von X_2 zu X_2 hinzuzählen[5] muss, um X_3 zu erhalten. *Charakteristisch* ist, dass die Zuwächse sich Schritt für Schritt zwar ändern[6],

[3]Durch (1) wird der exponentiell verlaufende Prozess *rekursiv* definiert, d.h. X_1 mit Hilfe von X_0, X_2 mit Hilfe von X_1, X_3 mit Hilfe von X_2, usw.

[4]Durch (2) wird der durch (1) rekursiv definierte Prozess *explizit* definiert, d.h. man kennt nun direkt den Zusammenhang zwischen X_1, X_2, X_3, ... und X_0.

[5]Vorausgesetzt p ist positiv; wenn nicht, wird defacto subtrahiert ...

[6]Vorausgesetzt p ist verschieden von 0.

dass der *Faktor p* aber immer gleich bleibt und sich im Verlaufe des Prozesses nicht verändert. Wenn man p mit 100 multipliziert, kann man diese Zahl als *Prozentzahl* interpretieren: Sie gibt dann an, *wieviel Prozent man* (zum Beispiel) *von X_2 zu X_2 addieren muss*, um X_3 zu erhalten. Ist etwa $p = 0.07$ sind es 7%, bei $p = 1$ aber 100%, usw.

Ein Beispiel für eine exponentiell wachsende Zahlfolge liefert die berühmte *"Weizenkornlegende"*. Ohne die Story im einzelnen zu wiederholen, geht es um folgendes: Auf das erste Feld eines Schachbretts mit seinen $8 \cdot 8 = 64$ (abwechselnd weissen und schwarzen) Feldern, soll 1 Weizenkorn gelegt werden, auf das zweite Feld doppelte so viele, also 2, auf das dritte Feld wieder doppelt so viele, also $2 \cdot 2 = 2^2$, auf das dritte Feld neuerdings doppelt so viele, also $2 \cdot 2^2 = 2^3 = 8$, usw. Auf diese Weise entsteht die folgende Folge von Zahlen (kurz: Zahlfolge)[7]:

$$X_0 = 1, \;\; X_1 = 2 \cdot X_0 = 2, \;\; X_2 = 2 \cdot X_2 = 2 \cdot 2 = 2^2, \;\; X_3 = 2 \cdot X_3 = 2 \cdot 2^2 = 2^3, \;\; ..., \;\; X_{63} = 2^{63}$$

Mit anderen Worten: Hier ist $X_0 = 1$ und $q = 2$. Das *tückische* am exponentiellen Wachstum ist, dass die Zahlen *am Anfang* gar nicht so gross sind und gar nicht so schnell zu wachsen scheinen, dass es dann aber rasend schnell geht und die Zahlen gigantisch gross werden:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^{10} = 1024, ..., 2^{20} = 1'048'576, ..., 2^{30} = 1'073'741'824,$$

und schliesslich:

$$2^{63} = 9'223'372'036'854'775'808$$

Das ist eine *enorme Zahl*! Zum Vergleich: Die Anzahl Menschen auf der Erde wird zur Zeit auf etwa 8 Milliarden, also

$$8'000'000'000'$$

geschätzt.

3
Wo ist der Zusammenhang zur Corona-Pandemie?

In der Epidemiologie ist es üblich *drei Gruppen* von Menschen zu unterscheiden:

- Die Gruppe S der Menschen, die *noch nicht infiziert* und daher *ansteckbar* sind. (S für *"susceptible", anfällig.*)
- Die Gruppe I der Menschen, die *infektiös* sind und daher andere Menschen *anstecken können*. (I für *"infectious", ansteckend.*)
- Die Gruppe R der Menschen, die weder *ansteckend* noch *ansteckbar* sind, weil sie die infektiöse Phase hinter sich haben. Diese Gruppe umfasst Verstorbene, Genesene und Menschen, die zwar noch krank, aber nicht mehr ansteckend sind. (R für *"recovered", genesen,* und/oder *"removed", verstorben.*) Wenn in den Medien von "Infizierten" die Rede ist, sind meistens sowohl die infektiösen als auch diejenigen Menschen gemeint, die die Phase in der sie ansteckend waren, schon hinter sich haben.

[7]Bitte beachten Sie, dass X_0 die Zahl der Körner auf dem *ersten* Feld bezeichnet, X_{63} daher die Zahl der Körner auf dem letzten, dem 64. Feld.

Im folgenden soll das *Augenmerk* auf die *infektiösen* Menschen gelegt werden, denn sie definieren den *Fortgang* einer *Epidemie/Pandemie*. Wir legen zwei Modell-Annahmen zu Grund.

Hypothese 1 Eine Gruppe von I Infektiösen rufe binnen eines Tages in einer (grossen) Population von Ansteckbaren eine Gruppe von $p \cdot I$ *Neu*Infektiösen hervor[8]. Anders formuliert: Eine infektiöse Person ruft binnen eines Tages p *Neu*Infektiöse hervor.

Die Annahme ist, dass p für die Dauer der hier angestellten Betrachtungen *konstant* ist. Das ist natürlich eine Vereinfachung, die ihre Grenzen hat. Spätestens wenn die gesamte betrachtete Population immer mehr der Gruppe R angehört, ist diese Annahme sicher nicht mehr auch nur näherungsweise erfüllt. In der im folgenden betrachteten Phase der Krankheit wird davon ausgegangen, dass die Situation weit von diesem Punkt entfernt ist. Auch sollen während der betrachteten Phase keine (neuen) Massnahmen (wie die Verpflichtung auf Hygiene zu achten, eine minimale Distanz einzuhalten, eine Maske zu tragen, u.s.w.) ergriffen werden, die p beeinflussen können.

Was folgt aus Hypothese 1?

Bezeichnen wir mit

$$\begin{array}{l} I_0 \text{ die Anzahl der Infektiösen am Ende von Tag 0=zu Beginn von Tag 1} \\ I_1 \text{ die Anzahl der Infektiösen am Ende von Tag 1=zu Beginn von Tag 2} \\ I_2 \text{ die Anzahl der Infektiösen am Ende von Tag 2=zu Beginn von Tag 3} \\ \ldots \end{array} \tag{4}$$

Aus Hypothese 1 folgt sukzessive

$$\begin{array}{l} I_1 = I_0 + p \cdot I_0 = q \cdot I_0 \\ I_2 = I_1 + p \cdot I_1 = q \cdot I_1 = q^2 \cdot I_0 \\ I_3 = I_2 + p \cdot I_2 = q \cdot I_2 = q^3 \cdot I_0 \\ \ldots \end{array} \tag{5}$$

Dabei ist, wie in (3),

$$q = 1 + p \tag{6}$$

gesetzt. Machen wir ein:

Zahlenbeispiel 1 *Es sei $I_0 = 100$ und $p = 0.07$, i.e. $q = 1.07$. Dann erhält man aus* (5) *die Ergebnisse in Tabelle* 1 [9].

Die Tabelle zeigt, dass sich unter den gemachten Annahmen die *Zahl* der *Infektiösen* innert 10 *Tagen etwa verdoppelt*. Rechnet man so weiter, würde die Anzahl der Infektiösen innert 100 *Tagen*, also in gut 3 *Monaten*, auf über $100'000$ anwachsen.

[8] Die Zahl p ist typischerweise zwischen 0 und 1.

[9] Die in Tabelle 1 angegebenen Zahlen sind auf *ganze Zahlen gerundet*. Man kann sich fragen, *wie tauglich* ein Modell ist, das Zahlen mit Nachkommastellen liefert, wenn es darum geht, *Anzahlen* von Menschen zu prognostizieren. Es ist zweifellos ein Makel. Da ein Modell aber sowieso immer nur eine Annäherung an "die Wirklichkeit" sein kann, muss man ohnehin Abstriche in Kauf nehmen. Wenn daher ein Modell Zahlen mit Nachkommastellen als Prognosen für ganze Zahlen liefert, ist das allein nicht unbedingt ein Grund das Modell von Anfang an abzulehnen.

I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	...
100	107	114	123	131	140	150	161	172	184	197	210	225	...

Tabelle 1: Ad Zahlenbeispiel 1: Entwicklung der Zahl der Infektiösen unter Annahme von Hypothese 1 mit $p = 0.07$ über 12 Tage, ausgehend von 100 Infektiösen zu Beginn.

Diese Überlegungen berücksichtigen einen wichtigen Aspekt einer Erkrankung wie Covit-19 *nicht*: Eine *infektiöse Person* bleibt *nicht für alle Zeiten* infektiös. Daher führen wir eine zweite Hypothese ein.

Hypothese 2 Eine infektiöse Person ist während n Tagen ansteckend.[10]

Die Annahme, dass alle infektiösen Personen n Tage infektiös, also alle genau gleich lang infektiös sind, ist natürlich eine weitere vereinfachende Annahme.

Wenn man neben Hypothese 1 zusätzlich Hypothese 2 mit $n = 10$ zu Grunde legt, und weiters annimmt, dass es sich bei den $I_0 = 100$ Infektiösen am Anfang um *lauter* Neu*Infektiöse* handelt(e), die also alle noch 10 Tage infektiös sind, dann sind die Einträge für I_{10}, I_{11}, ... in Tabelle 1 *nicht* mehr *richtig*. Zum Beispiel reduziert sich I_{10} um 24 Uhr von Tag 10 um die $I_0 = 100$ (*Neu)*Infektiösen, von denen wir ausgingen und die die Werte I_1 bis I_9 bewirkt haben. Somit gilt für I_{10} als Folge von Hypothese 2:

$$I_{10} = 197 - 100 = 97 \tag{9}$$

Die sich *anschliessende Frage* wird sein, wie sich die Zahl der Infektiösen *über* die ersten 10 Tage hinaus weiter entwickeln wird. Das Problem wird in Abschnitt 4 behandelt.

Doch zuvor zu einer weiteren *Kennzahl*, die in der Epidemiologie eine grosse Rolle spielt: Der sogenannten

(Basis-)Reproduktionszahl R_0,

die im Zusammenhang mit der aktuellen Corona-Krise auch in den Medien neuerdings häufig genannt wird. Cuchiero und Teichmann schreiben: "*R_0 ist die Anzahl der Personen die* ein *infektiöser Mensch während der* Ansteckungsperiode *im Durchschnitt ansteckt.*"

Ich denke, es besteht auf Grund der Hypothesen 1 und 2 zwischen p, n und R_0 der folgende Zusammenhang:

$$R_0 = p \cdot n \tag{10}$$

Für $n = 10$ und $p = 0.07$ beträgt R_0 also 0.7. Bei $p = 0.1$ und weiterhin $n = 10$ hingegen, ist R_0 gerade 1. Eine grosse Reproduktionszahl von, sagen wir $R_0 = 7$ entspricht (bei $n = 10$) einem p von 0.7.

[10]Für *Zahlenbeispiele* werde ich

$$n = 10 \tag{7}$$

setzen. Für theoretische Überlegungen hingegen – zur Vereinfachung der Notation:

$$n = 5 \tag{8}$$

4

Kehren wir zur Frage zurück, die gegen Ende des letzten Abschnitts aufgeworfen wurde: Wie entwickelt sich eine Epidemie, wenn man Hypothese 1 *und* Hypothese 2 zu Grunde legt? Also berücksichtigt, dass Erkrankte *nicht* unbeschränkt lang infektiös bleiben.

Da es (sowieso!) *unrealistisch* ist von einer Gruppe von lauter *Neu*Infektiösen auszugehen, die also gemäss Hypothese 2 alle noch genau gleich lang infektiös bleiben, müssen die Betrachtungen verfeinert werden. Erklären möchte ich das Vorgehen am Fall $n = 5$, das heisst unter der Annahme, dass die Hypothese 2 mit $n = 5$ gilt, weil dadurch der Notationsaufwand einigermassen erträglich bleibt.

Entsprechend der beiden Hypothesen und im Hinblick auf die Wahl $n = 5$ ist es plausibel, die Infektiösen in *fünf Gruppen* G_1 bis G_5 einzuteilen und sie jeweils zum

Stich-Zeitpunkt 24 Uhr= 00 Uhr

zu betrachten. Es bezeichne:

G_1 die Gruppe der Infektiösen, die (nur) noch am folgenden Tag, also noch 1 Tag infektiös sind
G_2 die Gruppe der Infektiösen, die noch am nächsten und übernächsten Tag, also noch 2 Tage infektiös sind (11)
G_3 die Gruppe der Infektiösen, die noch 3 Tage infektiös sind
G_4 die Gruppe der Infektiösen, die noch 4 Tage infektiös sind
G_5 die Gruppe der Infektiösen, die noch 5 Tage infektiös sind

Weiters bezeichne (jeweils zum Stich-Zeitpunkt):

n_1 die Anzahl der Personen in der Gruppe G_1
n_2 die Anzahl der Personen in der Gruppe G_2
n_3 die Anzahl der Personen in der Gruppe G_3 (12)
n_4 die Anzahl der Personen in der Gruppe G_4
n_5 die Anzahl der Personen in der Gruppe G_5

Schliesslich bedeute:

I_0 die Gesamtzahl der Personen aller 5 Gruppen (jeweils um 24 Uhr am Tag 0)
I_1 die Gesamtzahl der Personen aller 5 Gruppen (jeweils um 24 Uhr am Tag 1)
I_2 die Gesamtzahl der Personen aller 5 Gruppen (jeweils um 24 Uhr am Tag 2)
I_3 die Gesamtzahl der Personen aller 5 Gruppen (jeweils um 24 Uhr am Tag 3) (13)
I_4 die Gesamtzahl der Personen aller 5 Gruppen (jeweils um 24 Uhr am Tag 4)
I_5 die Gesamtzahl der Personen aller 5 Gruppen (jeweils um 24 Uhr am Tag 5)

Verfolgen wir die Entwicklung der Infektiösen-Anzahlen durch – zum Beispiel – die erste Periode von $n = 5$ Tagen. Tabelle 2 zeigt, wie sich die Zahlen entwickeln.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	Summe
Tag 0 um 24.00	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	I_0
Tag 1 um 24.00	n_2	n_3	n_4	n_5	$p \cdot I_0$	I_1
Tag 2 um 24.00	n_3	n_4	n_5	$p \cdot I_0$	$p \cdot I_1$	I_2
Tag 3 um 24.00	n_4	n_5	$p \cdot I_0$	$p \cdot I_1$	$p \cdot I_2$	I_3
Tag 4 um 24.00	n_5	$p \cdot I_0$	$p \cdot I_1$	$p \cdot I_2$	$p \cdot I_3$	I_4
Tag 5 um 24.00	$n'_1 := p \cdot I_0$	$n'_2 := p \cdot I_1$	$n'_3 := p \cdot I_2$	$n'_4 := p \cdot I_3$	$n'_5 := p \cdot I_4$	$I'_0 := I_5$

Tabelle 2: Entwicklung der Zahl der Infektiösen in den 5 Gruppen über eine Periode von $n = 5$ Tagen.

Zur Begründung von Tabelle 2:
– I_0 ist nach Definition die Summe der Zahlen n_1, ..., n_5, also

$$I_0 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

und bedeutet die Gesamtzahl der infektiösen Personen um 24 Uhr von Tag 0, bzw. um 0 Uhr von Tag 1.
– Die I_0 Infektiösen bewirken, dass am Tag 1 gemäss Hypothese 1 $p \cdot I_0$ Personen *neu* infektiös werden, was sich als Zahl Infektiöser der Gruppe G_5 am Tag 1 um 24 Uhr niederschlägt, weil diese NeuInfektiösen nach Hypothese 2 $n = 5$ Tage infektiös sein werden und weil ab diesem Zeitpunkt die n_5 Infektiösen, die am Tag 1 die Gruppe G_5 bildeten in die Gruppe G_4 übertreten und diese bilden, weil die n_4 Infektiösen, die am Tag 1 die Gruppe G_4 gebildet haben, ihrerseits nun die Gruppe G_3 bilden, usw.
– Die n_1 Infektiösen, die um 24.00 von Tag 0 die Gruppe G_1 gebildet haben, verschwinden um 24.00 von Tag 1 aus der "Buchhaltung", weil sie nach Tag 1 nicht mehr infektiös sind, also nach Tag 1 keine NeuInfektiösen mehr hervorbringen. Und so weiter.
– I_1 ist nach Definition die Summe der Zahlen in den 5 Gruppen in der Zeile "Tag 1", also:

$$I_1 = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + p \cdot I_0$$

– Und so weiter.

Durch Tabelle 2 wird ein **Algorithmus** beschrieben, der folgendes leistet: *Ausgehend von den Beständen in den Gruppen zu einem vorgegebenen Stich-Zeitpunkt können die Bestände in den Gruppen zu den nächsten n $(= 5)$ Stich-Zeitpunkten berechnet werden.*

Zahlenbeispiel 2 *Es sei $n = 10$ und $p = 0.07$ und die Zahlen n_1, n_2, ..., n_{10} gemäss Zeile 2 von Tabelle 3. Der Algorithmus à la Tabelle 2 liefert dann die in den Zeilen 3, 4 und 5 von Tabelle 3 wiedergegebenen Resultate für die Grössen der Gruppen G_1 bis G_{10} jeweils um 24 Uhr von Tag 10, Tag 20 und Tag 30. (Dazu wird das Resultat für Tag 10 als "Start" für den Algorithmus zur Bestimmung des Resultats für Tag 20, und dieses als "Start" für den Algorithmus zur Bestimmung des Resultats für Tag 30 benutzt.)*

Abbildung 1 zeigt die grafische Darstellung der Daten aus Tabelle 3 und darüber hinaus die Entwicklung über weitere 20 Tage. Beides, sowie die Werte für I_0, I_{10}, I_{20}, I_{30} in der letzten Kolonne von Tabelle 3 legen nahe, dass es in diesem Fall nicht zu einer Ausbreitung der Epidemie *kommt.*

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	
Tag 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	$I_0 = 100$
Tag 10	7.	7.4..	8.0..	8.5..	9.1..	9.8..	10.5..	11.2..	12.0..	12.8..	$I_{10} = 96.7..$
Tag 20	6.7..	6.7..	6.7..	6.6..	6.4..	6.2..	6.0..	5.7..	5.3..	4.8..	$I_{20} = 61.5..$
Tag 30	4.3..	4.1..	3.9..	3.7..	3.5..	3.3..	3.1..	2.9..	2.7..	2.5..	$I_{30} = 34.5..$

Tabelle 3: Ad Zahlenbeispiel 2: Entwicklung der Infektion unter folgenden Annahmen: $n = 10$, $p = 0.07$. i) über 10 Tage, siehe 3. Zeile, ii) über 20 Tage, siehe 4. Zeile, und iii) über 30 Tage, siehe 5. Zeile, wobei angenommen ist, dass es zu Anfang 100 NeuInfektiöse gibt.

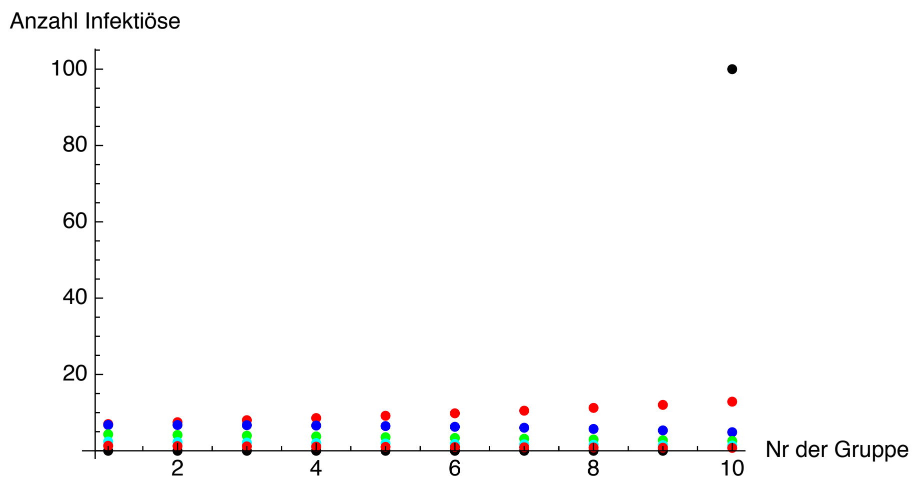

Abbildung 1: Ad Zahlenbeispiel 2: Grafische Darstellung der Ergebnisse von Tabelle 3. schwarz: Daten Tag 0, rot: Daten Tag 10, blau: Daten Tag 20, grün: Daten Tag 30, cyan: Daten Tag 40, rot: Daten Tag 50.

Zahlenbeispiel 3 *Es sei wieder* $n = 10$, *nun aber* $p = 0.12$ *und, wie in Zahlenbeispiel* 2, $n_1 = n_2 = ... = n_9 = 0$ *und* $n_{10} = 100$. *Statt der ausführlichen Tabelle wie im Zahlenbeispiel* 2, *gebe ich hier die zur Grafik in Abbildung* 1 *analoge Grafik, siehe Abbildung* 2, *sowie die Werte von* I_0, I_{10}, I_{20}, I_{30}, I_{40} :

$$I_0 = 100, \quad I_{10} = 210. .., \quad I_{20} = 321. ..., \quad I_{30} = 457. ..., \quad I_{40} = 643.40..., \quad I_{50} = ...$$

Es sieht ganz so aus, als würde sich die Epidemie in diesem Fall zu einer Pandemie auswachsen.

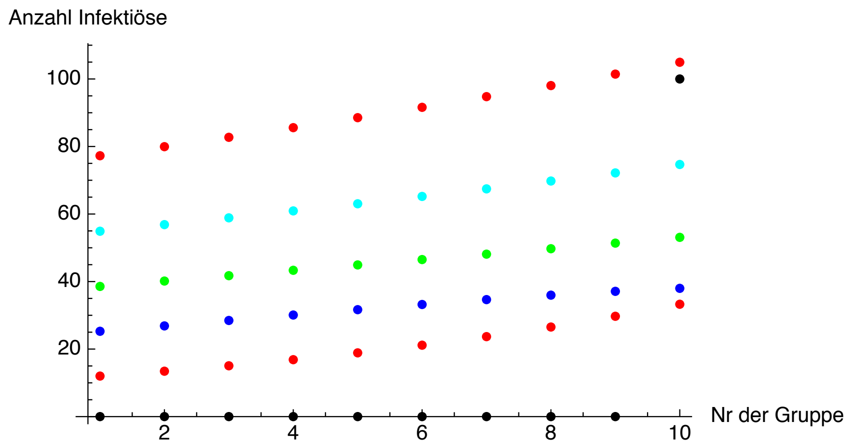

Abbildung 2: Ad Zahlenbeispiel 3 – Grafische Darstellung. Gleiche Bedingungen wie im Zahlenbeispiel 2, jedoch mit $p = 0.12$ (anstelle von $p = 0.07$). schwarz: Daten Tag 0, rot: Daten Tag 10, blau: Daten Tag 20, grün: Daten Tag 30, cyan: Daten Tag 40, rot: Daten Tag 50.

Interessant am Zahlenbeispiel 2 ist insbesondere, dass die Epidemie sich bei $p = 0.07$, also $q = 1.07$, somit bei einem q-Wert, der etwas grösser als 1 ist, *nicht* zu einer Pandemie auswächst, obwohl zu Beginn alle vorhandenen Infektiösen *neuinfektiös* sind, also über die maximale Dauer von 10 Tagen infektiös sein werden. Man kann erwarten, dass das erst recht nicht geschieht, wenn man mit einer Gruppe von unterschiedlich lange Infektiösen startet. Zur Illustration das Zahlenbeispiel 4.

Zahlenbeispiel 4 *Es sei wieder* $n = 10$, $p = 0.07$, *somit* $q = 1.07$, *also wie in Zahlenbeispiel* 2, *nun aber* $n_1 = n_2 = ... = n_9 = n_{10} = 10$. *Mit anderen Worten: Zu Beginn gibt es* 10 *Personen, die noch einen Tag infektiös sind,* 10 *weitere Personen, die noch zwei Tage infektiös sind, usw. Dann liefert die Rechnung als Prognose für die Entwicklung der Epidemie Abbildung* 3. *Ferner erhält man:*

$$I_0 = 100, \quad I_{10} = 58. .., \quad I_{20} = 32. ..., \quad I_{30} = 17. ..., \quad I_{40} = 9. ..., \quad I_{50} = ...$$

Diese Zahlen stützen die Vermutung, dass die Epidemie noch schneller abklingt, wenn die Gruppe der Infizierten von der man ausgeht, nicht aus lauter Neuinfizierten besteht.

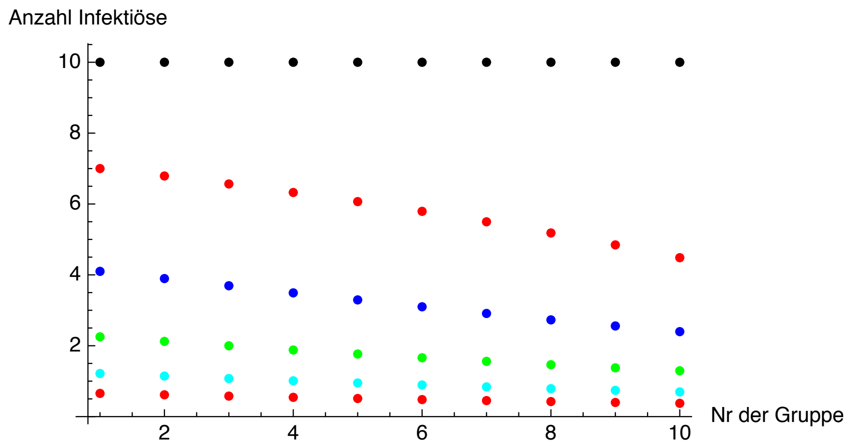

Abbildung 3: Ad Zahlenbeispiel 4 – Grafische Darstellung. Gleiche Bedingungen wie im Zahlenbeispiel 2 (insbesondere ist $p = 0.07$, $q = 1.07$), jedoch ausgehend von jeweils 10 Infektiösen in jeder der 10 Grupen G_1 bis G_{10}. schwarz: Daten Tag 0, rot: Daten Tag 10, blau: Daten Tag 20, grün: Daten Tag 30, cyan: Daten Tag 40, rot: Daten Tag 50.

Aus den Zahlenbeispielen 2 und 4 folgt, dass sich die Epidemie bei $p = 0.07$, $q = 1.07$, somit $R_0 = 0.7$, offenbar *nicht ausbreitet*. Sind diese Werte allerdings *etwas höher*, nämlich $p = 0.12$, $q = 1.12$, also $R_0 = 1.2$, folgt aus Zahlenbeispiel 3, dass die Epidemie mutmasslich in eine *Pandemie übergeht*. Irgendwo dazwischen wird der "*Schwellenwert*" liegen, bei dem der Modus von der einen Verhaltensweise der Epidemie in die andere wechselt. Dabei ist allerdings nicht klar, ob dieser Schwellenwert von der anfänglichen Verteilung der Infektiösen auf die Gruppen G_1 bis G_{10} abhängt: Es ist nicht unplausibel, dass er bei der Verteilung von Zahlenbeispiel 4 etwas höher liegen könnte als bei der Verteilung in Zahlenbeispiel 2.

* * *

In ihrem Artikel weisen Cuchiero und Teichmann auf folgendes *Phänomen* hin. Nehmen wir an, dass sich zu Beginn in jeder der 10 Gruppen G_1 bis G_{10} *gleich viele infektiöse Personen*, sagen wir 15, befinden. Nehmen wir weiter an, dass, vergleiche (10):

$$p = 0.1 \quad \Longrightarrow \quad q = 1.1, \quad R_0 = 0.1 \cdot 10 = 1 \tag{14}$$

gilt. Wie entwickelt sich die Epidemie in dieser Situation? Betrachen wir zur Klärung die ersten zwei Zeilen in zur Tabelle 2 analogen Tabelle 4.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	Summe
Tag 0	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	$I_0 = 150$
Tag 1	15	15	15	15	15	15	15	15	15	$p \cdot I_0 = 0.1 \cdot 150 = 15$	$I_1 = 150$

Tabelle 4: Die ersten beiden Zeilen des zur Tabelle 2 analogen Tableaus unter der Annahme $n_1 = n_2 = ... = n_{10} = 15$ und $p = 0.1$.

Die *Quintessenz* aus Tabelle 4 ist: Wenn die 10 *Gruppen G_1 bis G_{10} alle gleich gross sind*[11] und (14) gilt, also $p = 0.1$, folglich: $R_0 = 1$, ist, dann liegt ein *Gleichgewicht* vor: Täglich werden

[11] Die Zahl 15 ist unwesentlich: Die Überlegung funktioniert genau so, wenn statt 15 irgend eine andere Zahl gewählt wird.

ebenso viele Personen *neuinfektiös* wie Personen *ausscheiden*, weil sie nach 10 Tagen gemäss Hypothese 2 nicht mehr ansteckend sind.

Was jedoch, wenn unter Beibehalt der Voraussetzung (14) die Grössen der Gruppen G_1 bis G_{10} anfänglich *unterschiedlich* gross sind? Betrachten wir *zwei Beispiele*.

Zahlenbeispiel 5 *Es gelte*

$$n_1 = 5,\ n_2 = 5,\ n_3 = 10,\ n_4 = 10,\ n_5 = 15,\ n_6 = 15,\ n_7 = 15,\ n_8 = 20,\ n_9 = 25,\ n_{10} = 30 \tag{15}$$

und weiterhin

$$p = 0.1$$

Die Rechnung ergibt die in Tabelle 5 *und Abbildung* 4 *dargestellten Ergebnisse. Man sieht: Die anfänglich ungleiche Verteilung der Infektiösen auf die* 10 *Gruppen* G_1 *bis* G_{10} strebt rasch *einem* Zustand *zu, bei dem die* Gruppen gleich gross *sind, also alle Gruppen gleich viele Infektiöse beinhalten. Allerdings steigt dabei die Gesamtzahl der infektiösen Personen von anfänglich* 150 *auf etwa* 190 *an.*

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	Summe
Tag 0	5	5	10	10	15	15	15	20	25	30	$I_0 = 150$
Tag 10	15.	16.	17.1.	17.8.	18.5.	18.9.	19.3.	19.7.	19.7.	19.2.	$I_{10} = 181.5.$
Tag 20	18.1.	18.4.	18.7.	18.8.	18.9.	19.0.	19.0.	19.0.	18.9.	18.8.	$I_{20} = 188.0.$
Tag 30	18.8.	18.8.	18.9.	18.9.	18.9.	18.9.3.	18.9.	18.9.	18.8.	18.8.	$I_{30} = 189.0.$

Tabelle 5: Ad Zahlenbeispiel 5: Entwicklung einer Epidemie, wenn zu Beginn eine *ungleichmässige Verteilung* der Infektiösen auf die 10 Gruppen G_1 bis G_{10} vorliegt und bei $p = 0.1$, i.e. beim Schwellenwert.

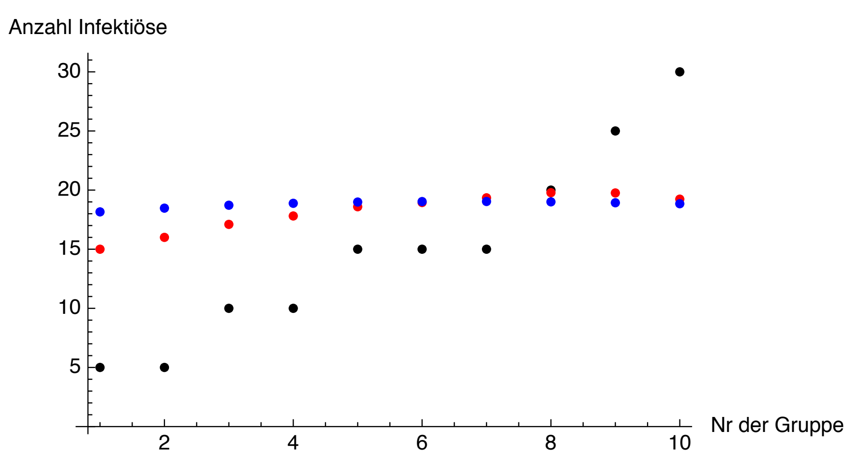

Abbildung 4: Ad Zahlenbeispiel 5 – Grafische Darstellung der Daten aus Tabelle 5: Anfängliche Verteilung der infektiösen Personen auf die 10 Gruppen: siehe Gl. (15), $p = 0.1$. schwarz: Daten Tag 0, rot: Daten Tag 10, blau: Daten Tag 20.

Zahlenbeispiel 6 *Abbildung* 5*, schliesslich, zeigt die Entwicklung der Epidemie, wenn die anfängliche Belegung der* 10 *Gruppen* umgedreht *wird, wenn die Epidemie also mit der folgenden Verteilung von* 150 *Infektiösen auf die* 10 *Gruppen* G_1 *bis* G_{10} beginnt*:*

$$n_1 = 30,\ n_2 = 25,\ n_3 = 20,\ n_4 = 15,\ n_5 = 15,\ n_6 = 15,\ n_7 = 10,\ n_8 = 10,\ n_9 = 5,\ n_{10} = 5 \tag{16}$$

und weiterhin

$$p = 0.1$$

gesetzt ist.

Auch in diesem Fall gleichen sich die Gruppengrössen rasch an und "stabilisieren" sich bei etwa 11 *infektiösen Personen pro Gruppe, sodass im Gleichgewicht die Gesamtzahl der Infektiösen konstant bei etwa* 110 *liegt. Im Gegensatz zum Zahlenbeispiel zuvor,* reduziert *sich die Gesamtzahl bei dieser Ausgangslage also, während im Zahlenbeispiel* 5 *die Gesamtzahl im Gleichgewichtszustand* höher *ist als zu Beginn.*

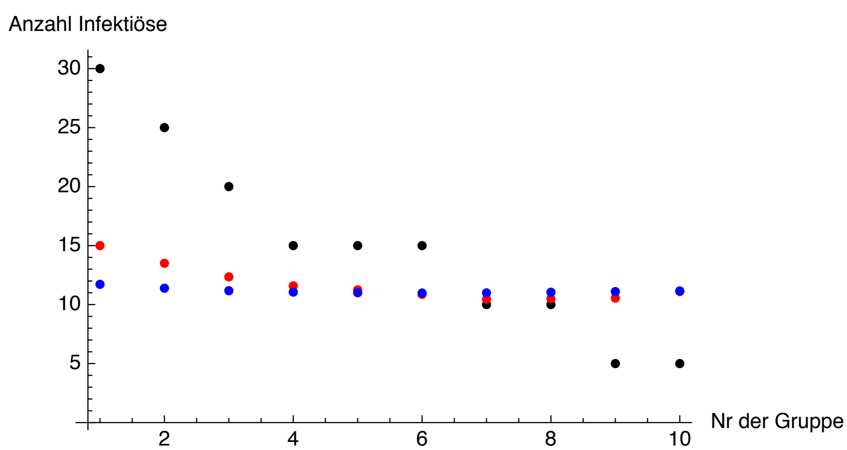

Abbildung 5: Ad Zahlenbeispiel 6 – Grafische Darstellung. Anfängliche Verteilung der infektiösen Personen auf die 10 Gruppen: siehe Gl. (16), $p = 0.1$. schwarz: Daten Tag 0, rot: Daten Tag 10, blau: Daten Tag 20.

5

Das in Abschnitt 3 durch die beiden Hypothesen 1, 2 eingeführte, sehr einfache *Modell* für die Entwicklung einer Epidemie, wurde in den Abschnitten 3 und 4 untersucht, indem anhand ausgewählter (Modell-)Rechnungen einige Phänomene illustriert wurden, die in diesem Modell offenbar auftreten können.

Im nun folgenden letzten Teil geht es darum, das Auftreten dieser Phänomene mit mathematischen Mitteln zu verstehen, und wenn möglich weitere Einsichten zu gewinnen. Dazu möchte ich ein paar wenige Werkzeuge aus der sogenannten *Linearen Algebra* benutzen: Etwas *Matrizenrechnung* und einfache Kenntnisse aus der sogenannten *Eigenwerttheorie*. Leserinnen und Leser, die über diese Kenntnisse nicht verfügen, haben eine Vielzahl von Quellen zur Verfügung, etwa: K. Nipp und D. Stoffer: “Lineare Algebra”, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich. Aber vielleicht sind auch schon die paar Bemerkungen in den *“Endnoten”* hilfreich.

Ich lege den folgenden Ausführungen einfachheitshalber wieder den Fall $n = 5$ zu Grunde, wie zu Beginn von Abschnitt 4. Ich wiederhole, bis auf geringfügige Bezeichnungsänderungen, die ersten Zeilen von Tabelle 2:

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
$\vec{n}$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
$\vec{n}'$	$n_1' := n_2$	$n_2' := n_3$	$n_3' := n_4$	$n_4' := n_5$	$n_5' := p \cdot I_0$

mit $I_0 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$

Tabelle 6: Entwicklung der Zahl der Infektiösen in den 5 Gruppen über eine Periode von 1 Tag.

Der *springende Punkt*: Der Übergang von den Daten n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 in der zweiten Zeile von Tabelle 6 zu den Daten n_1', n_2', n_3', n_4', n_5' in der dritten Zeile der Tabelle, stellt eine sogenannte *lineare Abbildung* dar und wird am bequemsten mit Hilfe der *Vektor-Matrix-Notation* beschrieben[1] [12]

$$\vec{n} := \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{n'} := \begin{pmatrix} n_1' \\ n_2' \\ n_3' \\ n_4' \\ n_5' \end{pmatrix}, \quad M(p) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & p & p & p & p \end{pmatrix} \tag{17}$$

Man überprüft, durch Vergleich mit Tabelle 6 unschwer, dass

$$\vec{n'} = M(p) \,.\, \vec{n} \tag{18}$$

gilt, wobei der Punkt “ . ” hier *Matrix-Multiplikation* bedeutet.

Da man, wie ein Blick auf Tabelle 2 zeigt, die dritte Zeile aus der zweiten genau gleich erhält, wie die zweite aus der ersten, folgt[2]

$$\vec{n}\,'' := \begin{pmatrix} n_1'' \\ n_2'' \\ n_3'' \\ n_4'' \\ n_5'' \end{pmatrix} = M(p) \,.\, \vec{n}\,' = M(p) \,.\, (M(p) \,.\, \vec{n}) = (M(p) \,.\, M(p)) \,.\, \vec{n} =: (M(p))^2 \,.\, \vec{n} \tag{19}$$

u.s.w.

In der Sprache der sogenannten *Dynamischen Systeme* formuliert, kann man sagen es liege ein *lineares diskretes dynamisches System*, erzeugt durch die Matrix $M(p)$, vor.

Mit der *Eigenwerttheorie* steht ein starkes Werkzeug zur Verfügung, um *lineare diskrete dynamische Systeme* zu *untersuchen*[3].

[12]Mit der Notation $M(p)$ wird zum Ausdruck gebracht, dass die Matrix M von der Grösse p abhängt, *eine Funktion von p ist*, wie man sagt, sich also verändert, je nachdem was man für p für Zahlen einsetzt.

(In den Abschnitten 3 und 4 haben wir das Augenmerk nicht so sehr auf die Entwicklung einer Epidemie von *Tag zu Tag* gelegt, sondern jeweils *über* n *Tage*, mit n gemäss Hypothese 2, und schwergewichtig auf den beiden Fällen $n = 5$, bzw. $n = 10$. Auf den Fall $n = 5$ bezogen bedeutet das, dass man statt die Matrix $M(p)$ das *fünffache Produkt* von $M(p)$ *mit sich selbst*, also die Matrix

$$\mathcal{M}(p) := M(p) \,.\, M(p) \,.\, M(p) \,.\, M(p) \,.\, M(p) = (M(p))^5$$

studiert. Bis auf eine Bemerkung über den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrix $M(p)$ und der Matrix $\mathcal{M}(p)$ werde mich nicht weiter mit $\mathcal{M}(p)$ auseinandersetzen.)

5.1 Der Fall $p = \frac{1}{5} = 0.2$

Betrachten wir zuerst für p die Wahl $\frac{1}{5} = 0.2$. Es ist sehr einfach nachzurechnen, dass die Matrix $M(0.2)$ (sie entsteht, wenn man in der Definition der Matrix $M(p)$ in (17) für p den Wert 0.2 einsetzt) den *Eigenwert* 1 hat, denn für den Vektor

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

(und alle seine Vielfachen) gilt:

$$M(0.2) \,.\, \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \tag{21}$$

Das bedeutet: Der im ersten Quadranten des "5-dimensionalen Raums R^5" [13] liegende Teil der Geraden durch den Nullpunkt, sowie den Punkt mit den Koordinaten $(1, 1, 1, 1, 1)$, besteht aus lauter *Fix-*(oder *Gleichgewichts-*)*Punkten* des durch die Matrix $M(\frac{1}{5})$ definierten linearen diskreten dynamischen Systems.

Typischerweise hat eine $n \times n$-Matrix n *paarweise voneinander verschiedene Eigenwerte.* Das trifft auch auf die Matrix $M(0.2)$ zu.

Ich benutzte die *Routine "Eigenvalues" des Programm-Pakets "Mathematica"* um *alle Eigenwerte* der Matrix $M(0.2)$ zu bestimmen. Das Programm liefert für $M(0.2)$ folgende Näherungen, die überdies in Abbildung 6 in der *komplexen Zahlenebene* grafisch dargestellt sind:

$$\begin{array}{rcc} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_{2,3} & = & 0.137832 \pm 0.678154 \cdot i \\ \lambda_{4,5} & = & -0.537832 \pm 0.358285 \cdot i \end{array} \tag{22}$$

Für die *Dynamik* der *Epidemie* entscheidend sind die *(absoluten) Beträge* $|\lambda_1|, |\lambda_{2,3}|, |\lambda_{4,5}|$ der *Eigenwerte* $\lambda_{2,3}, \lambda_{4,5}$ – also die *Abstände* der entsprechenden Punkte in Abbildung 6 vom *Nullpunkt* in der komplexen Zahlenebene. Die Rechnung ergibt:

$$|\lambda_1| = 1, \qquad |\lambda_{2,3}| = 0.69202, \qquad |\lambda_{4,5}| = 0.646244 \tag{23}$$

Was folgt daraus?

[13] Gemeint sind sämtliche 5-*Tupel* von Zahlen.

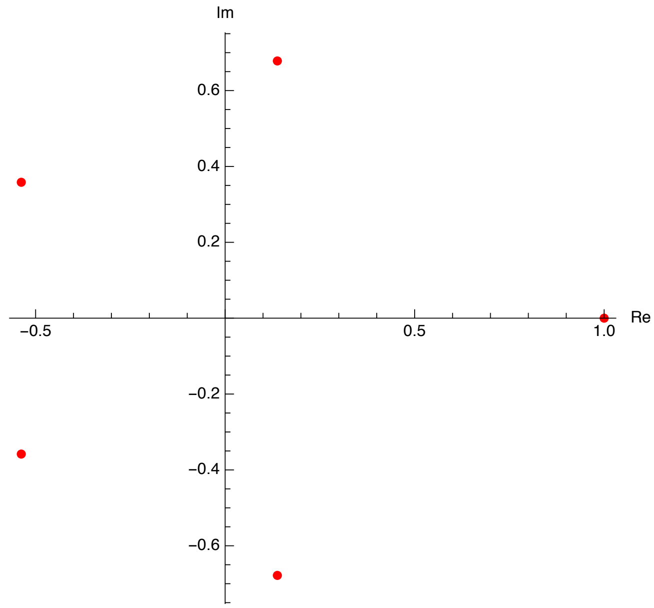

Abbildung 6: Darstellung der Eigenwerte der Matrix $M(0.2)$ in der komplexen Zahlenebene.

Ich bezeichne in Analogie zum Eigenvektor $\vec{v}_1$ (zum Eigenwert λ_1) die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 mit $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ [14].

Da die 5 Eigenwerte paarweise voneinander verschieden sind, bilden die 5 Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ eine sogenannte *Basis* für die 5-Vektoren. Das bedeutet, dass man jeden beliebigen 5-Vektor $\vec{n}$ auf eine (und nur eine) Art als sogenannte *Linearkombination* mit Hilfe der Basis-Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ ausdrücken kann:

$$\vec{n} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + a_4 \cdot \vec{v}_4 + a_5 \cdot \vec{v}_5 \tag{24}$$

Dabei sind a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gewisse durch den 5-Vektor $\vec{n}$ bestimmte Zahlen[4].
Hieraus folgt[5]:

$$(M(0.2))^j \,.\, \vec{n} = a_1 \cdot 1^j \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \lambda_2^j \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \lambda_3^j \cdot \vec{v}_3 + a_4 \cdot \lambda_4^j \cdot \vec{v}_4 + a_5 \cdot \lambda_5^j \cdot \vec{v}_5 \tag{25}$$

Dabei wird benützt, dass $\lambda_1 = 1$ ist, siehe (22). Weil die Eigenwerte λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 *betragsmässig* kleiner als 1 sind, siehe (23), gilt:

$$\lambda_2^j \longrightarrow 0, \quad \lambda_3^j \longrightarrow 0, \quad \lambda_4^j \longrightarrow 0, \quad \lambda_5^j \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad j \longrightarrow \infty$$

und folglich:

$$(M(0.2))^j \,.\, \vec{n} \;\longrightarrow\; a_1 \cdot \vec{v}_1 \;\; \text{für} \;\; j \;\longrightarrow\; \infty \tag{26}$$

Damit kann man das folgende *Resultat* formulieren:

Wenn $p = 0.2$ (i.e. $q = 1.2$ und $R_0 = 5 \cdot 0.2 = 1$) gilt, dann *strebt* die Epidemie bei jeder beliebigen anfänglichen Verteilung der Infektiösen auf die fünf Gruppen G_1, G_2, G_3, G_4 undG_5 gegen einen *Gleichgewichtszustand*. Gegen *welchen* Gleichgewichtszustand, hängt jedoch sehr wohl von der anfänglichen Verteilung ab. (27)

[14] Dabei soll analog zu $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, $\lambda_5 = \overline{\lambda_4}$ gelten: $\vec{v}_3 = \overline{\vec{v}_2}$, $\vec{v}_5 = \overline{\vec{v}_4}$. Dabei bezeichnet der Querstrich "konjugiert komplex". Den zu einem Vektor konjugiert komplexen Vektor erhält man, indem man jede Komponente im gegebenen Vektor durch die konjugiert komplexe Zahl ersetzt.

Pro memoria: *Gleichgewichtszustand* bedeutet: Die 5 Gruppen G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 sind alle *gleich gross*.

5.2 Der Fall $p \neq \frac{1}{5} = 0.2$

Um etwas auch über die Dynamik einer Epidemie gemäss den Modell- Hypothesen 1, 2 für Werte $p \neq 0.2$ zu erfahren, muss man etwas über die *Eigenwerte* der Matrix $M(p)$ für $p \neq 0.2$ wissen, insbesondere über ihre *Beträge*, speziell, ob sie betragsmässig *kleiner* oder *grösser* als 1 sind. Wieder leistet die *Routine "Eigenvalues" des Programm-Pakets "Mathematica"* hervorragende Dienste, indem sie den Plot von Abbildung 7 zum Preis von einigen Mausklicks liefert.

Die in *roter Farbe* in Abbildung 7 wiedergegebenen Kurven sind die Grafen der Funktionen[15]:

$$|\lambda_1(p)|, \qquad |\lambda_{2,3}(p)|, \qquad |\lambda_{4,5}(p)|$$

(Hierzu folgende Bemerkung: Da $\lambda_2(p)$ und $\lambda_3(p)$, bzw. $\lambda_4(p)$ und $\lambda_5(p)$ zueinander *konjugiert komplex* sind, gilt $|\lambda_2(p)| = |\lambda_3(p)|$, bzw. $|\lambda_4(p)| = |\lambda_5(p)|$ und daher fallen die Graphen von $|\lambda_2(p)|$ und $|\lambda_3(p)|$, bzw. $|\lambda_4(p)|$ und $|\lambda_5(p)|$ zusammen, und so zeigt Abbildung 7 nur drei Graphen.)

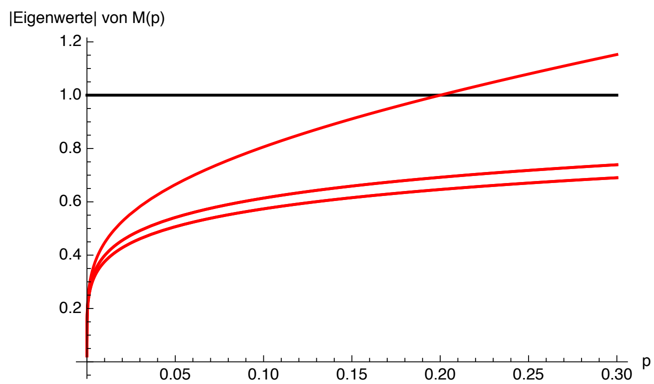

Abbildung 7: In roter Farbe dargestellt sind die Graphen von $|\lambda_1(p)|$, $|\lambda_{2,3}(p)|$, $|\lambda_{4,5}(p)|$ für p zwischen 0 und 0.3.

Was folgt aus Abbildung 7?

In Analogie zu den Formeln (24) und (25) gilt:

$$\vec{n} = a_1 \cdot \vec{v}_1(p) + a_2 \cdot \vec{v}_2(p) + a_3 \cdot \vec{v}_3(p) + a_4 \cdot \vec{v}_4(p) + a_5 \cdot \vec{v}_5(p) \tag{28}$$

und

$$\begin{aligned}(M(p))^j \,.\, \vec{n} &= a_1 \cdot \lambda_1(p)^j \cdot \vec{v}_1(p) + a_2 \cdot \lambda_2(p)^j \cdot \vec{v}_2(p) + a_3 \cdot \lambda_3(p)^j \cdot \vec{v}_3(p) + \\ &+ a_4 \cdot \lambda_4(p)^j \cdot \vec{v}_4(p) + a_5 \cdot \lambda_5(p)^j \cdot \vec{v}_5(p)\end{aligned} \tag{29}$$

[15] So wie in (17) $M(p)$ geschrieben wurde um anzudeuten, dass sich die Matrix M verändert, je nachdem welche Zahlen man für p wählt, ist es angemessen auch $\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)$, ... zu schreiben, weil sich auch die Eigenwerte der Matrix M verändern, wenn man die Grösse p verändert, und mutatis mutandis analog auch die zugehörigen Eigenvektoren, sodass sich folgende Notation anbietet: $\vec{v}_1(p)$, $\vec{v}_1(p)$, ...

Da die Eigenwerte $\lambda_{2,3}$, $\lambda_{4,5}$ für *p zwischen* 0 *und* 0.3 gemäss Abbildung 7 betragsmässig *kleiner als* 1 sind, *streben* die zugehörigen vier Summanden in (29) für $j \longrightarrow \infty$ *gegen* 0, sodass gilt[16]:

$$\boxed{(M(p))^j\,.\,\vec{n} \;\;\longrightarrow\;\; a_1 \cdot \lambda_1(p)^j \cdot \vec{v}_1(p) \;\;\text{für}\;\; i \longrightarrow \infty} \tag{30}$$

Für die *langzeitliche Entwicklung* der Epidemie i.e. für *grosse Werte von j* kommt es nach (30) offenbar darauf an, ob $\lambda_1(p)$ *kleiner* oder *grösser als* 1 ist. Die entsprechende Information ist in Abbildung 7 enthalten:

- Wenn p zwischen 0 und 0.2 liegt, kommt die Epidemie (gemäss dem Modell!) schliesslich zum Erliegen.
- Wenn p grösser als 0.2 ist, prognostiziert das Modell exponentiell rasche Ausbreitung der Epidemie (vorausgesetzt es ist $a_1 \neq 0$).

(31)

(Mutatis mutandis lassen sich ganz *analoge Überlegungen* für das durch die Matrix $\mathcal{M}(p)$ definierte lineare dynamische System anstellen und analoge Folgerungen ziehen. Dazu braucht man nur zu wissen, dass die Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ von $M(p)$ auch Eigenvektoren von $\mathcal{M}(p)$ sind, mit $(\lambda_1(p))^5$, $(\lambda_2(p))^5$, $(\lambda_3(p))^5$, $(\lambda_4(p))^5$, $(\lambda_5(p))^5$ als zugehörige Eigenwerte.)

6

Die Grafiken in Abbildung 8, siehe Seite 19, sind Pendants zur Grafik in Abbildung 7: Dargestellt sind (in *rot*) die *Beträge* der *Eigenwerte*[17] der zur Matrix $M(p)$ (siehe Gleichung (17)) analogen Matrizen, nun aber statt nur im Fall $n = 5$, auch für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 10$. Im Fall $n = 2$ sind es zwei reelle Eigenwerte, im Fall $n = 3$ ist $\lambda_1(p)$ reell, während die anderen beiden Eigenwerte konjugiert komplex sind. Bei $n = 4$ sind $\lambda_1(p)$ und $\lambda_4(p)$ reell, $\lambda_{2,3}(p)$ sind konjugiert komplex. Der Fall $n = 5$ wurde oben ausführlich behandelt. Im Fall $n = 7$ ist $\lambda_1(p)$ reell, die übrigen 6 Eigenwerte sind paarweise konjugiert komplex. Im Fall $n = 10$ sind der (betragsmässig) grösste Eigenwert $\lambda_1(p)$ und der (betragsmässig) kleinste Eigenwert $\lambda_{10}(p)$ reell, die übrigen 8 sind paarweise konjugiert komplex (und liegen betragsmässig) zwischen $\lambda_1(p)$ und $\lambda_{10}(p)$. Schliesslich ist in jeder Grafik (in *blau*) der Graph der *Funktion*

$$R_0(p) = n \cdot p, \tag{32}$$

eingezeichnet[18].

Unser durch die Hypothesen 1 und 2 definiertes Modell für die Ausbreitung einer Epidemie verwendet *zwei Parameter: p und n*. Der Parameter p ist ein Mass dafür, wie leicht man sich mit dem Virus ansteckt. Der Parameter n ist ein Mass dafür, wie lang eine infektiöse Person ansteckend ist.

[16] Die Behauptung (30) stimmt auch für p zwischen 0 und 0.2, weil $|\lambda_{2,3}(p)|$, $|\lambda_{4,5}(p)|$ gemäss Abbildung 7 kleiner sind als $|\lambda_1(p)|$. Für p zwischen 0.2 und 0.3 wächst der Term $a_1 \cdot \lambda_1(p)^j \cdot \vec{v}_1(p)$ an, und die Behauptung stimmt erst recht.

[17] in Abhängigkeit des Parameters p

[18] Man vergleiche mit der Definition (10) der Reproduktionszahl.

Die Grafiken in Abbildung 8, siehe Seite 19, machen nun sichtbar, welch wichtige Rolle die (bei uns "abgeleitete") *Kennzahl* R_0 spielt: *Es sind alle Eigenwerte im jeweils betrachteten* p-*Intervall betragsmässig kleiner als* 1*, mit Ausnahme des betragsmässig grössten:* $\lambda_1(p)$*. Auch* $\lambda_1(p)$ *ist für kleinere Werte von* p *kleiner als* 1*. Für einen bestimmten kritischen Wert* p_{krit} *von* p *erreicht* $\lambda_1(p)$ *den Wert* 1*. Für* p*-Werte, die grösser als* p_{krit} *sind, ist der Wert von* $\lambda_1(p)$ *grösser als* 1.

Wie die vorangegangene Diskussion in Abschnitt 5 zeigt, heisst das, dass die Epidemie für Werte von p unterhalb des kritischen Werts p_{krit} *abklingt*, während sie für Werte von p, die grösser als p_{krit} sind, *exponentiell anwächst*.

Die *Pointe* ist nun folgende: Während der kritische Wert p_{krit} von p mit dem Parameter n variiert, hat $R_0(p)$ für $p = p_{krit}$ *unabhängig* von n *immer* den Wert 1. Da $R_0(p)$ wie $\lambda_1(p)$ monoton wachsend bezüglich p ist gilt:

> *Ganz unabhängig vom Wert von* n *prognostiziert unser Modell bei einer* Reproduktionszahl *kleiner als* 1 *ein* Abklingen der Epidemie*, bei einer* Reproduktionszahl *grösser als* 1*, dass sie sich* exponentiell ausbreitet.

7 Dank und Empfehlung

Ich sage meinen Freunden und Mathematikerkollegen K. Nipp, H.R. Schneebeli und D. Stoffer Dank: Sie haben das Manuskript oder Teile davon gelesen und kritisch kommentiert. HRS hat mir einen interessanten Text von F. Gassmann zukommen lassen, von dem eine Version unter dem Titel "Ein Modell der Coronapandemie zeigt, dass der Lockdown gerade noch rechtzeitig kam – aber wie berechnet man eigentlich ein Virus?" am 27. April 2020 im St. Galler Tagblatt erschienen ist. Das Modell beruht auf einer sogenannten Funktionaldifferenzialgleichung, genauer auf einer linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit Verzögerung. Das spannende und reizvolle an der Arbeit ist sodann, dass der Autor die zur Verfügung stehenden Parameter an aktuelle schweizerische Corona-Daten anpasst und diese auf diese Weise nicht nur erstaunlich gut rekonstruieren kann, sondern auch verschiedene Zukunftsszenarien gewinnt. Hinsichtlich der Reproduktionszahl ist der Artikel: "Irrungen und Wirrungen um die Zahl R" von C. Speicher und A. Kohler in der NZZ vom 16. Mai 2020 von Interesse.

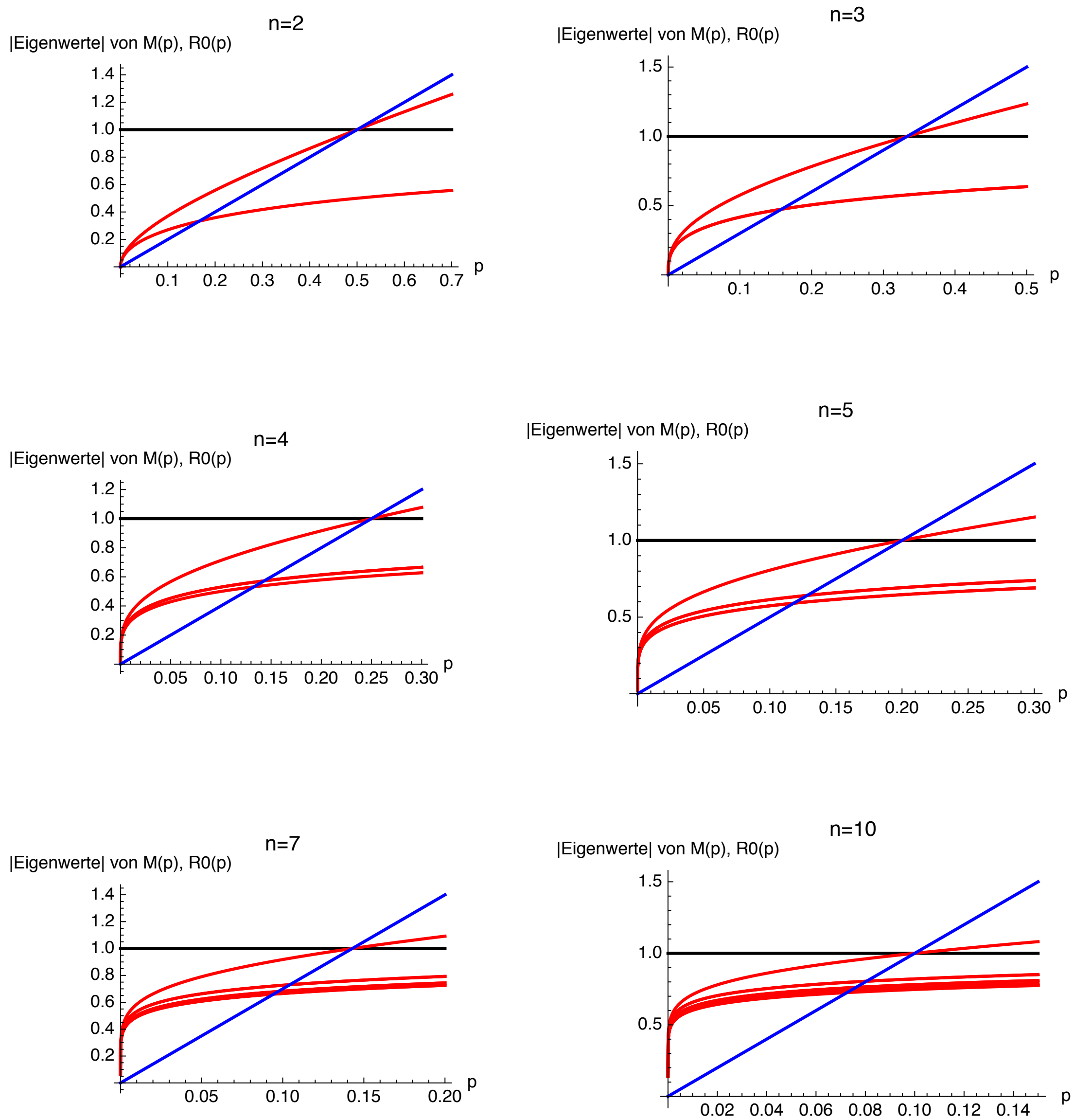

Abbildung 8: Grafische Darstellung der Beträge der Eigenwerte der Matrizen $M(p)$ für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 10$ in Abhängikeit von p, sowie Darstellung des Graph der Funktion $R_0(p)$.

Notes

[1]Eine $n \times m$-*Matrix* ist ein rechteckiges Schema von $n \cdot m$ Zahlen, angeordnet in n Zeilen und m Kolonnen. Besonders wichtig sind *einkolonnige* Matrizen, i.e. Matrizen, die aus n Zeilen und 1 Kolonne bestehen, also $n \times 1$-Matrizen; sie nennt man auch *Vektoren*, oder genauer n-*Vektoren*; meist werden Vektoren mit Kleinbuchstaben bezeichnet, die oft unterstrichen oder mit einem kleinen Pfeil überstrichen werden, etwa: $\vec{v}$.

Weiters sind *quadratische Matrizen* von besonderer Bedeutung, also solche bei denen die Anzahl der Zeilen gleich gross ist wie die Anzahl der Kolonnen, i.e. wenn $m = n$ gilt. Man spricht dann von $n \times n$-Matrizen. Matrizen werden meist mit Grossbuchstaben bezeichnet, siehe (17).

Mit Matrizen kann man verschiedenste *Operationen* ausführen. Besonders bedeutungsvoll ist die sogenannte *Matrix-Multiplikation*. Aus den beiden Matrizen A und B kann man das *Produkt* $A \,.\, B$ bilden[19], wenn A gleich viele Kolonnen hat, wie B Zeilen. M.a.W. wenn A vom Typ $n \times m$ und B vom Typ $m \times p$ ist. Das Produkt $A \,.\, B$ ist dann eine $n \times p$-Matrix.

Das Element in der Zeile i und der Kolonne j von $A \,.\, B$ erhält man, indem man die Zeile i der Matrix A mit der Kolonne j der Matrix B *skalar multipliziert*, d.h. indem man entsprechende Elemente miteinander multipliziert und alle Produkte addiert.

Insbesondere kann man einen $n \times n$-Matrix mit einem n-Vektor multiplizieren und erhält so einen "neuen" n-Vektor. Ein Beispiel ist das Produkt des 5-Vektors $\vec{n}$ mit der 5×5-Matrix $M(p)$, siehe (17), (18) (in Verein mit Tabelle 6).

Es gibt eine Reihe von *Rechenregeln* für die Operationen mit Matrizen, insbesondere für das Multiplizieren von Matrizen. Sie lernt man in einem Kurs über Lineare Algebra kennen, weil sie theoretisch wichtig und für das Rechnen mit Matrizen enorm nützlich sind. Diese Regeln sind einfach und fast alle naheliegend.

Nur in Bezug auf eine Eigenschaft muss man aufpassen, weil sie *nicht gilt*. Das Matrix-Produkt ist *nicht kommutativ*. Es kann zwar sein, dass man nicht nur das Produkt $A \,.\, B$, sondern auch das Produkt $B \,.\, A$ bilden kann[20]. Aber dennoch ist $A \,.\, B$ typischerweise *verschieden* von $B \,.\, A$! Das ist insbesondere auch dann häufig der Fall, wenn A und B Matrizen des Typs $n \times n$ sind, also beide "quadratische Gestalt" haben und darüber hinaus "gleich gross" sind.

[2]Dass das vierte Gleichheitszeichen in (19) gilt, ist eine Konsequenz der in Endnote 1 erwähnten Rechenregeln, die für Operationen mit Matrizen gelten: Es ist das sogenannte Assoziativ-Gesetz, das nicht nur für die Multiplikation von Zahlen, sondern auch für die Matrix-Multiplikation gilt.

[3]Ausgangspunkt ist eine quadratische Matrix, also eine Matrix vom Typ $n \times n$ – nennen wir sie A. Die (reelle oder komplexe) Zahl[21] λ heisst *Eigenwert* von A, wenn es einen vom

[19]Oft wird der "Multiplikationspunkt" weggelassen, das heisst statt $A \,.\, B$ schreibt man kurzerhand $A\,B$.

[20]Das ist keineswegs immer der Fall! (Warum?)

[21]Auch wenn alle Einträge in die Matrix A lauter *reelle* Zahlen sind, (die Matrix A heisst dann: *reell*) kann es gut sein, dass einige, oder sogar alle ihre Eigenwerte komplexe Zahlen sind.

Nullvektor verschiedenen[22] n-Vektor $\vec{v}$ gibt, sodass gilt[23]:

$$A \,.\, \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \tag{33}$$

Wenn ein (vom Nullvektor verschiedener) n-Vektor $\vec{v}$ die Gleichung (33) erfüllt, heisst er *Eigenvektor* zum *Eigenwert* λ. Mit einem Eigenvektor zu einem Eigenwert, sind auch *alle Vielfache* dieses Vektors Eigenvektoren zum betreffenden Eigenwert.

Zur Bestimmung der Eigenwerte der Matrix A kann man das sogenannte *charakteristische Polynom* $P_n(\lambda)$ benutzen. Es entsteht indem man die sogenannte *Determinante*[24] der Matrix

$$A - \lambda \cdot I \tag{34}$$

bildet, also:

$$P_n(\lambda) := \mathrm{Det}(A - \lambda \cdot I_n) \tag{35}$$

Dabei bezeichne I_n die sogenannte *$n \times n$-Einheitsmatrix*, das ist die $n \times n$-Matrix, deren Elemente bis auf diejenigen in der "(Haupt-)Diagonale" gleich 0 sind, während die Diagonalelemente alle gleich 1 sind. Für $n = 5$ lautet Einheitsmatrix

$$I_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für das charakteristische Polynom der 5×5-Matrix $M(p)$ in (17) findet man[25]:

$$P_5(\lambda) = \mathrm{Det}(M(p) - \lambda \cdot I) = -\lambda^5 + p \cdot \lambda^4 + p \cdot \lambda^3 + p \cdot \lambda^2 + p \cdot \lambda + p \tag{36}$$

Aus (36) bestätigt man unschwer: Für

$$p = \frac{1}{5} = 0.2 \tag{37}$$

ist, wie zu erwarten, siehe (21),

$$\lambda = 1$$

Nullstelle von $P_5(\lambda)$. Allgemein sind die *Eigenwerte* einer Matrix gerade die *Nullstellen* ihres *charakteristischen Polynoms*.

---

[22] Das heisst: Mindestens eine der n Zahlen, die den Vektor $\vec{v}$ bilden (diese Zahlen heissen *Komponenten* des Vektors), ist *von der Zahl* 0 *verschieden*. Wenn λ eine komplexe Zahl ist, dann sind auch die Komponenten des Vektor $\vec{v}$ komplexe Zahlen.

[23] Der Vektor $\vec{v}$ wird mit der Zahl λ multipliziert, indem man jede Komponente des Vektors $\vec{v}$ mit λ multipliziert.

[24] Unter der *Determinante* einer $n \times n$-Matrix versteht man eine aus den Zahlen, die die Matrix definieren, gebildete *Zahl*, die Sie vielleicht vom Auflösen von linearen Gleichungssystemen her kennen: Wenn die entsprechende Determinante verschieden von 0 ist, hat das Gleichungssystem eine (und nur eine) Lösung; ist sie hingegen gleich 0, hat das Gleichungssystem entweder keine oder aber unendliche viele Lösungen.

[25] Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix ist ein Polynom vom *Grad* n in λ, in unserem Beispiel mit einer 5×5-Matrix also vom Grad 5.

Wenn man – zum Beispiel durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_n(\lambda)$ – die Eigenwerte gefunden hat, ist die *Bestimmung* der zugehörigen *Eigenvektoren* eine Routineaufgabe: Man muss lediglich die linearen (und "homogenen") Gleichungssysteme

$$(A - \lambda \cdot I_n)\vec{v} = 0$$

nach $\vec{v}$ auflösen.

Die *Aufgabe* zu einer gegeben *Matrix* die *Eigenwerte* und die *zugehörigen Eigenvektoren* zu berechnen ist derart wichtig, dass es viele *Computerprogramme* gibt, die einem diese Aufgabe abnehmen und sie jedenfalls näherungsweise lösen. Ich benütze üblicherweise die *Routinen "Eigenvalues" und "Eigensystem" des Programm-Pakets "Mathematica"*.

[4] Für die Eigenvektoren zu den Eigenwerten (22) der Matrix $M(0.2)$ liefert die Mathematica-Routine (bequemlichkeitshalber auf drei Stellen gerundet)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.447 \\ -0.447 \\ -0.447 \\ -0.447 \\ -0.447 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.731 \\ 0.101 + 0.496 \cdot i \\ -0.322 + 0.137 \cdot i \\ -0.137 - 0.200 \cdot i \\ 0.117 - 0.121 \cdot i \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \overline{\vec{v}_2},\ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0.768 \\ -0.413 + 0.275i \\ 0.123 - 0.296i \\ 0.0396 + 0.203i \\ -0.0942 - 0.095i \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \overline{\vec{v}_4} \tag{38}$$

Wählen wir für den Vektor $\vec{n}$ zum Beispiel:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + a_4 \cdot \vec{v}_4 + a_5 \cdot \vec{v}_5 = \vec{n} \tag{40}$$

lautet dann

$$a_1 = -81.9892,\ \ a_2 = 2.77447 + 27.0424 \cdot i,\ \ a_3 = \overline{a_2},\ \ a_4 = -20.0018 + 12.598 \cdot i,\ \ a_5 = \overline{a_4} \tag{41}$$

Insbesondere gilt: Die Komponente des Vektors $\vec{n}$ in Richtung des Eigenvektors $\vec{v}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 = -81.9892 \cdot (-0.447) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.6667 \\ 36.6667 \\ 36.6667 \\ 36.6667 \\ 36.6667 \end{pmatrix} \tag{42}$$

[5] Eine der nützlichsten Regeln für das Rechnen mit Matrizen, vergleiche Endnote 1, ist das Distributiv-Gesetz, zum Beispiel in folgender Form

$$A\,.\,(x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}) = x \cdot A\,.\,\vec{u} + y \cdot A\,.\,\vec{v} \tag{43}$$

Dabei bezeichnet A eine $n \times n$-Matrix, $\vec{u}$, $\vec{v}$ n-Vektoren und x, y Zahlen. Daraus folgt zum Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} M(0.2)\,.\,\vec{n} & = & M(0.2)\,.\,(a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + a_4 \cdot \vec{v} + +a_5 \cdot \vec{v}_5) \\ & = & a_1 \cdot M(0.2)\,.\,\vec{v}_1 + a_2 \cdot M(0.2)\,.\,\vec{v}_2 + a_3 \cdot M(0.2)\,.\,\vec{v}_3 + \\ & + & a_4 \cdot M(0.2)\,.\,\vec{v}_4 + a_5 \cdot M(0.2)\,.\,\vec{v}_5 \\ & = & \lambda_1 \cdot a_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot a_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot a_3 \cdot \vec{v}_3 + \lambda_4 \cdot a_4 \cdot \vec{v}_4 + \lambda_5 \cdot a_5 \cdot \vec{v}_5 \end{array}$$

Dabei wurde benützt, dass λ_1 Eigenwert der Matrix $M(0.2)$ mit Eigenvektor $\vec{v}_1$ ist, usw. Analog erhält man:

$$\begin{array}{rcl} (M(0.2))^2\,.\,\vec{n} & = & M(0.2)\,.\,(M(0.2)\,.\,\vec{n}) \\ & = & M(0.2)\,.\,(\lambda_1 \cdot a_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot a_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot a_3 \cdot \vec{v}_3 + \lambda_4 \cdot a_4 \cdot \vec{v}_4 + \lambda_5 \cdot a_5 \cdot \vec{v}_5) \\ & = & \lambda_1^2 \cdot a_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2^2 \cdot a_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3^3 \cdot a_3 \cdot \vec{v}_3 + \lambda_4^2 \cdot a_4 \cdot \vec{v}_4 + \lambda_5^2 \cdot a_5 \cdot \vec{v}_5 \end{array}$$

u.sw.

UK 20200609